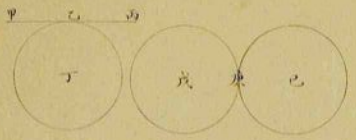
幾何原本卷四

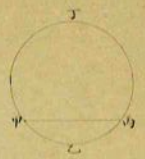
此卷論圜屬之形

第一



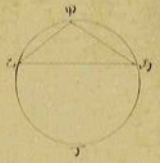
凡一直線。切於圜界。雖過界而不與圜界出入交加。此謂圜之切線。設如甲乙丙線與丁圜之界乙處相遇。其線雖過乙至丙。而與丁圜界不出入交加。此甲乙丙線即為圜之切線。再凡一圜。又與一圜界相遇。而不與圜界相交。此謂之切圜。假如戊圜。與己圜於庚處相遇。此二圜之界不相交加。即為之切圜也。

第二

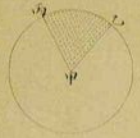


凡一直線橫分圈之兩界者。謂圈之弦線。而所分圈界之一段謂弧。此弦與弧相遇形成之二雜角。謂圈之弧分之角。設如甲丙線。在甲乙丙丁圈之甲丙二界處橫分之。此甲丙線即為弦尖。再所分之甲丁丙一段。甲乙丙一段俱為弧尖。然此甲丙弦。與甲乙丙弧。兩尖相遇所成之甲丙乙。丙甲乙二雜角俱為圈之弧分之角尖。

第三



凡自圈一弦之兩頭。各作一直線。相遇於圈界之處。所成之此一角。謂圈分內角。而此角又謂與相對弧之立角也。設如甲乙丙丁圈之甲乙丙一段。自乙丙弦之兩頭。各作一直線。與甲處相遇。形成乙甲丙形之甲角。即圈分內角。然此甲角與乙丁丙弧相對。故又為對弧之立角也。

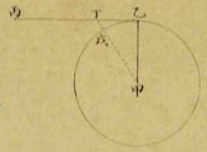


第四

凡一圈有二幅線。與一弧相乘所成之三角形。謂分圈面形。設如一圈。自甲心至圈界乙

丙二處。作甲乙。甲丙二輻線。所成之一甲乙丙三角形。即為分圜而形也。

第五



凡自與圜界相切輻線之末。作一垂線。此垂線與輻線之末。在圜界僅一點相切。其他處全在圜外。設如若甲圜而與甲乙輻線之乙末相切。作一丙乙垂線。則此丙乙垂線與甲乙輻線。俱在圜界乙處之一點相切。而此垂線丁等之處全在圜外也。何則。自圜之甲心至丁。作一甲戊丁線。此線既不與甲乙垂線相等。同二卷第十三節所云。長於甲乙線可知矣。因其長。必將圜界割而出之。既割而出之。此線末之丁處出於圜界之外。既出於圜界之外。而丙乙線。自乙至丙全在圜外可知矣。

第六

凡在圜弦線。若自圜心作一垂線。此垂線必將弦線為兩平分。設如在乙丙弦。自圜之甲心至弦之丁處。作一垂線。必將乙丙弦平分為乙丁。丁丙。何則。自甲心至乙丙二點作二

幅線。成一甲乙丙三角形。則此三角形之甲乙。甲丙二線。為一圈之幅線。與首卷之第十二節所云等也。因其相等。而此甲乙丙三角形。自甲角至乙丙底線之丁處作垂線。同二卷第十節所云。將乙丙底為兩平分也。是以自圈心至弦。若作垂線。既謂將弦線兩平分。誠若竟將垂線引於弧界戊處作線。此弧界亦可以為平分可知矣。

第七

凡自一點至圈界兩邊作二切線。此二線之度必相等。設如自甲點至圈界乙丙二處作甲乙。甲丙二切線。此二線之度必等。何則。自圈心丁處至圈界乙丙二切線之末作二幅線。同此卷第五節。此二幅線在甲乙。甲丙為垂線可知矣。因其為垂線。則甲乙丁。甲丙丁之二角。必同首卷第十五節俱為直角矣。因為二直角。此二角之度為等。再自丙至乙作線。即成丁乙丙。甲乙丙兩三角形。而丁乙丙三角形之丁乙。丁

丙二線為一圜之幅線。與首卷第十二節所云等也。因其相等。照二卷第九節。其丁乙丙。丁丙乙二角必等也。此二角既等。則甲乙丙。甲丙乙二角者。自甲乙丁。甲丙丁二相等直角之所餘。亦為等。此二角又既等。同二卷第九節所云。此甲乙。甲丙二切線。為相等可知矣。

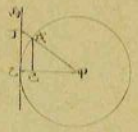
第八

凡圜有兩弦線若等。其分圜弧而之積亦等。若自心至此相等兩弦作二垂線。此二垂線之度亦等。設如甲圜之丙乙。丁戊之度若等。則所分丙己乙。辛丁。庚戊壬二弧而積亦等。再自此圜之甲心至丙乙丁戊二弦等處。作甲辛。甲壬二垂線。其度亦為等。何則。自甲心至丙乙丁戊四處。作四幅線。即成甲丙乙。甲丁戊兩三角形。此兩三角形之各三界線。其每邊既俱等。則此相等線所對之角。同二卷之七節亦為等。丙乙丁戊二等弦所對之丙甲乙。丁甲戊二角亦為等。因此二角等。與此相對界之丙己乙。丁庚戊二弧。同首卷第九節亦為等也。丙己乙。丁庚戊二弧線等。丙乙。丁戊二弦線既等。若將丁庚戊壬之弧而積移放於丙己乙辛。必恰相符。因其恰符。同二卷第六節必

相等也。再甲辛甲壬二線。俱是垂線。同二卷第十節。將丙乙丁戊二弦為兩平分。既為兩平分。則丙辛。乙辛。丁壬。戊壬之四線。亦俱等。今甲丙辛。甲丁壬。兩三角形之丙辛。丙甲二界線。與丁壬。丁甲二界線之度每邊各等。又此各二線相遇所成之甲丙辛角。甲丁壬角之度亦既為等。同二卷第五節。其甲辛。甲壬兩底線度亦為等。此甲辛甲壬兩底線者。即題所言之垂線也。

第九

凡弧線之所屬有三種線。一謂弧之切線。一謂弧之割線。一謂弧之正弦線。在此三種線。凡角之度。欲用在線皆可取也。設如若甲圈在甲乙幅線之乙末。作丙乙垂線。又圈心甲至圈界戊處割出。而至丙乙垂線之丁處。作甲丁線。又從戊至甲乙幅線。作戊己之垂線。即成三種線也。其丁乙線謂乙戊弧之切線。甲丁線謂乙戊弧之割線。戊己線謂乙戊弧之正弦。凡用在線欲取各角之度。俱在此三種線矣。何則。若用在線欲取其乙甲戊角之度。或自與甲角相對乙戊弧之丁乙切線度取之。或自乙戊弧之甲丁割線度取之。或自乙戊弧

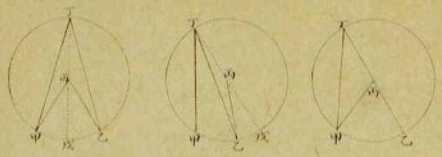


之戊己正弦度取之。

第十

一圜之界。任於二處至圜心作二線。再自界線之原二處。至圜界一處作二線。即成二角。在心者謂心角。在界者謂界角。設如若甲乙丁圜。自甲乙二處至丙心。作甲丙。乙丙二直線。仍自此甲乙二處至圜界丁處。作甲丁。乙丁二直線。成甲丙乙。甲丁乙二角。其甲丙乙角謂心角。甲丁乙角謂界角也。

第十一



圜心之角交與界角有三種。其圜心所生界角。或在二直線之一線者。或在二直線之外者。或在二直線之間者。此三種心角。皆大於界角之一倍。設如甲丙乙之心角。或若第一圖所成之甲丁乙角。在於丁乙一線之內。或若第二圖在於甲丁。乙丁二直線之外。或若第三圖在甲丁。乙丁二直線之間。此三種甲丙乙心角。皆與甲丁乙界角大一倍。何則。圜之丙心。若在丁乙之線內。甲丙乙心角。為甲

丙丁三角形之外角。因其為外角。同二卷第四節所云。與甲丁丙。丙甲丁二內角等。然甲丙。丙丁二線既為一圜之輻線。同首卷第十二節所云。其度俱等可知矣。此二線既等。同二卷第九節所云。甲丁丙。丙甲丁二角亦等。今甲丙乙之外角。既與甲丁丙。丙甲丁二內角等。必大於甲丁丙一內角之一倍。可知。再圜之丙心。若同第二圖在所成界角甲丁。丁乙二直線之外。自界丁角過圜之丙心。至對界。作一丁丙戊直線。即成甲丙戊一大心角。乙丙戊一小心角。甲丁戊一大界角。乙丁戊一小界角。其甲丙戊一大心角。如前第一圖之所論。

既倍於甲丁戊大界角。而乙丙戊小心角。亦倍於乙丁戊小界角。今自甲丙戊大心角。減去乙丙戊小心角。甲丁戊大界角。減去乙丁戊小界角。所減之乙丙戊心角。大與所減乙丁戊界角一倍。其所餘之甲丙乙心角。亦大於所餘之甲丁乙界角一倍。再圜之丙心。若同第三圖在所成界角甲丁。丁乙二直線之間。自界丁角過圜之丙心。至對界作丁丙戊直線。又如第一圖之所論。即成甲丙戊。乙丙戊二心角。甲丁戊。乙丁戊二界角。是以甲丙戊心角。同第一圖之所論。倍於甲丁戊界角。其丙乙戊心角。亦倍於乙丁戊界角。今若將甲丙戊。乙

丙戊二心角並之。即為甲丙乙一心角矣。將甲丁戊。乙丁戊二界角並之。亦為甲丁乙一界角矣。此所分之二心角。既各倍於彼所分二界角。此所並之甲丙乙一心角。必倍於彼所並之甲丁乙一界角。若然。故謂甲丙乙之心角。倍於甲丁丙之界角也。

第十二

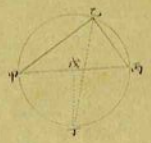
自圜之弧線。凡一段。任與圜界何處。其尖相切所成之界角。有幾何。其度俱為等。設如甲乙丙丁之圜。自甲乙弧之一段。至圜界丙丁二處。其尖相切所成之甲丙乙。甲丁乙二界角。其度俱為等。何則。自圜之戊心。至甲乙二處作二線。即成甲戊乙一心角。前節云一心角。一界角。若俱在於一弧。其心角大一倍於界角。今甲戊乙一心角。甲丙乙。甲丁乙二界角。既在於甲乙之一弧。亦同前節甲戊乙角。必俱大一倍於甲丙

乙角。甲丁乙角矣。是以甲丙乙。甲丁乙二角。俱為甲戊乙角之半。因俱各為半。此二角度必等也。

第十三

一圈之內。有一心角。一界角。若心角所對弧線之度。與界角所對弧線之度一半。此二角度為等。設如乙圈之內。有甲乙丙一心角。甲丁戊一界角。與甲乙丙心角相對。甲丙弧線之度。若是與甲丁戊界角相對甲丙己戊弧線之度一半。而甲乙丙心角之度。必與甲丁戊界角之度等。何則。假若自丁角過圈乙心至對界己處。作丁乙己直線。即成甲乙己。己乙戊二心角。甲丁己。己丁戊二界角。同此卷第十一節。其甲乙己心角度。倍於甲丁己界角。己乙戊心角度。亦倍於己丁戊界角。今若將甲乙己。己乙戊二心角相並。將甲丁己。己丁戊二界角亦相並。其所並之甲乙己。己乙戊二心角之度。必倍於所並之甲丁己。己丁戊二界角之度矣。是以甲丁戊一界角必與所並之甲乙己。己乙戊二心角之一半等。再甲丙弧線。既為甲丙己戊弧線之一半。而甲乙丙角。亦為所並之甲乙己。己乙戊二角之一半。前亦言甲丁戊界角。為所並二心

角之一半。故甲乙丙一心角度。必等於甲丁戊一界角之度可知矣。



第十四

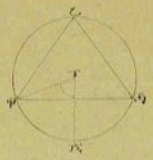
凡圈之界角。若立於圈界之半。必為直角。設如甲乙丙界角。立於圈界甲丁丙之半。此甲乙丙角。必是直角。何則。甲丁丙之半圈界。自丁處為兩平分。又自丁至圈心處。作丁戊線。即成甲戊丁角。則與此甲戊丁角相對之甲丁弧線為圈之四分之一。依首卷第十四節為直角矣。前節既云。心角相對弧線。若是界角相對弧線之一半。其二角之度必等矣。今甲戊丁心角。相對之甲丁弧線。既為甲乙丙界角相對之甲丁丙弧線之一半。故同前節甲戊丁心角度與甲乙丙界角度俱等。先既言甲戊丁心角為直角。此甲乙丙界角亦為直角可知矣。

第十五

凡圈之界角。若在半圈分之小分內。必為鈍角。設如若甲乙丙之分。正小於半圈。此分內所有之甲乙丙界角。必是鈍角。何則。其甲乙

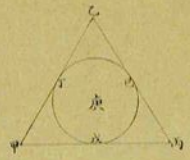
丙之分。既小於半圈。則所餘之甲戊丙之分。自大於半圈。因其為大。若將甲乙丙弧線於戊處為兩平分。又自圈心丁至甲戊二處。作二直線。前甲戊丙弧分。既大於半圈。則此甲戊弧線亦大於圈之四分之一矣。故此相對之甲丁戊心角。同首卷第十六節為鈍角矣。再此卷第十三節所云。心角相對之弧線。若是界角相對弧線之一半。此二角度必相等矣。今甲丁戊心角相對之甲戊弧線。既正是為甲乙丙界角。與相對甲戊丙弧線之一半。則甲乙丙界角。與甲丁戊心角度亦等。前既云甲丁戊心角為鈍角。茲甲乙丙界角亦為鈍角可知也。

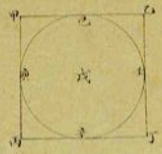
第十六



凡圈之界角。若在半圈分之大分內。必為銳角。設如甲乙丙之圈。分大於正半圈。此分內所有之甲乙丙界角。必是銳角。何則。其甲乙丙之分。既大於半圈。則所餘甲戊丙分。自小於半圈。因其為小。若將甲戊丙弧線。於戊處為兩平分。又自圈心丁至甲戊二處。作丁甲。丁戊二直線。即成甲丁戊一心角。此心角所對之甲戊弧線。既不足圈界四分之一。此甲丁戊角。同首卷第十六節為銳角矣。茲甲丁戊心角。與甲乙丙

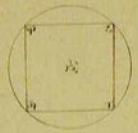
界角度。其論既俱與前節同。故甲乙丙界角。亦為銳角可知矣。





第十七

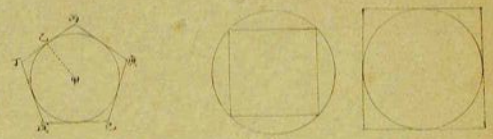
凡函圈在界形之各界。若與圈界相切而不相交。此謂之函圈切形。設如甲乙丙三角形之甲乙。甲丙。乙丙三界。俱與庚圈界丁己戊處相切。而不相交。即謂之函圈切界三角形。再甲乙丙丁四方形之四界。俱與戊圈界己庚辛壬之四處相切。亦不相交。即謂之函圈切界之四方形矣。



第十八

凡圈內在界形各角。若與圈界相切而不相交。謂圈內切形。設如甲乙丙三角形之甲角。乙角。丙角俱與丁圈內界相切而不相交。即謂之圈內切界三角形。再甲乙丙丁四方形之四角。俱與圈界相切。亦不相交。即謂之圈內切界四方形矣。

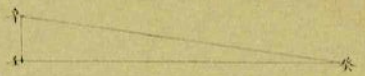
第十九

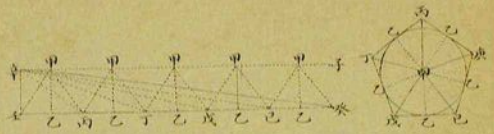


將前二節形考之。而函圜衆界形之度。大於函於圜之界。其函衆界形之圜界度。亦大於所函之衆界形。由此觀之。凡函於之形界。必小於函形界。而函形界必大於函於形界可知矣。

第二十

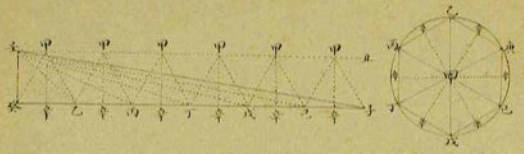
有一函圜衆界形。又一直角三角形。此三角形一直角。所生二直線內一直線度。若與函於圜之幅線度等。又一直線度與函圜衆界形之各界共度等。則斯三角形面積與衆界形面積等。設如有一函甲圜之丙丁戊己庚五邊形。又有一辛壬癸直角三角形。假若此三角形之一邊。辛壬直角線度。與五邊形之所函圜之甲乙幅線度等。再一邊之壬癸線度。與丙丁戊己庚五界線之共度等。則此辛壬癸三角形面積。即與彼丙丁戊己庚五邊形面積等矣。何則。自五邊形之甲心。至丙丁戊己庚之五角。作甲丙。甲丁。甲戊。甲己。甲庚五線。即成五三角形。再辛壬癸三角形之壬癸線度。





既與五邊形之五界共度等。今將壬癸線。依五邊線度等分作五分。將所分之五分為底。照前將五邊形所分五三角形度。若甲壬丙作五三角形。又自所分丙丁戊己四處。俱至於一辛處。作丙辛。丁辛。戊辛。己辛四線。遂分辛壬癸一三角形。為五三角形。再自圜心甲。至切圜各界乙處。作甲乙五縱線。此五縱線。既俱為幅線。同首卷第十二節所云其度俱相等。前言辛壬癸三角形之辛壬邊界。與五邊形所圍圜之甲乙幅線度等。茲甲壬丙相等之五三角形。既同於五邊之五三角形作者。今幅線度既俱等。此三角五形之高度亦為等也。因其高俱等。自辛壬癸三角形之辛處。與各甲角尖相切。至子作辛子線。同首卷第二十五節此辛子與壬癸為平行線矣。三卷第十二節云。平行線內。若同底所有之凡各種三角形之面積。俱相等。今辛壬丙。甲壬丙二形同底。辛丙丁。甲丙丁二形同底。辛丁戊。甲丁戊二形同底。辛戊己。甲戊己二形同底。辛己癸。甲己癸二形同底。是以同三卷第十二節所云。同底所有之形。其面積俱等也。此甲壬丙類之

五三角形。原與丙丁戊庚五邊形。所分之丙甲丁之類五三角形度相等。而作者。其面積俱等也。因其所分形之面積俱等。其全形之面積亦等矣。故辛壬癸直角三角形之面積。與丙丁戊己庚五邊形之面積等可知也。

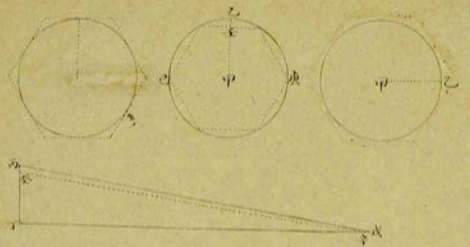


第二十一

一圜所函之衆界有。一等界形。又一直角三角形。此三角形之一直角所生二直線內。一直線度與彼圜自心至衆界形界。所作垂線度若等。再一直線度。與彼衆界形之共界度若等。則此三角形之面積。自與彼衆界形面積等。設如甲圜函一乙丙丁戊己庚六邊形。又一壬癸子直角三角形。假如此三角形之直角。一傍壬癸線度與。彼六邊形之甲辛垂

線度為等。再一傍之癸子線度。與六邊形之乙丙丁戊己庚六界之共度為等。則此壬癸子三角形之面積。與彼乙丙丁戊己庚六邊形面積等。何則。依前節所論。將六邊形分為六三角形。再將三角形之癸子界。照六邊形度分為六分。又照六邊形所分之六三角形。亦作六三角形。其壬癸子三角形之壬癸一邊線度。既與甲辛垂線等。而癸子一邊線度。又與乙丙丁戊己庚六邊形之共度等。故此二形之面積。與前節同俱為等矣。

第二十二

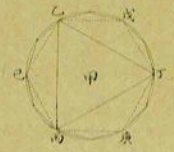


有一圜形。一直角三角形。苟此三角形之直角所生二直線內一直線度。與彼圜幅線度若等。又一直線度與彼圜週界度若等。則此直角三角形之面積。即與彼圜面積等。設如有一甲圜。一丙丁戊直角三角形。若此三角形之直角所生丙丁一邊直線度。與彼圜甲乙幅線度為等。再一邊丁戊直線度。與彼甲圜界自乙處起。於界旋轉復還乙處之週度若等。此丙丁戊三角形之面積。即與彼甲圜

之面積等也。何則。此丙丁戊三角形。若大於函於甲圜各種衆界形。或小於函圜各種衆界形。此三角形面積。必等於彼圜面積可知。假若此甲圜函己庚之衆界形。必同此卷第十九節所云。其所函之己庚衆度。小於圜界度矣。因其小於圜界度。亦短於丙丁戊三角形之與甲圜相等丁戊直線矣。因其為短。將此丁戊線與函於圜之衆界度相等。自辛處截開。繼自函於圜衆界形之心至界。作一甲壬垂線。此甲壬垂線。既不足於圜界。乙處自短於圜之甲乙幅線矣。因其短於幅線。亦短於丙丁戊三角形之甲乙幅線相等丙丁直線矣。將此丙丁直線。與甲壬垂線相等。自癸處截開。又自癸至辛。作一直線。即成一癸丁辛三角形。同此卷第二十一節所云。此癸丁辛三角形之面積。與彼函於圜己庚之衆界形之面積等。其癸丁辛三角形者。原自丙丁戊三角形分之。其丙丁戊三角形之面積。必大於癸丁辛三角形之面積。而癸丁辛三角形者。既等於函於圜己庚衆界形之面積。則丙丁戊三角形之面積。必大於函於圜己庚衆界形之面積可知矣。如此論之。則丙丁戊三角形之面積。必小於函圜各種衆界形之面積。亦可得而知矣。故丙丁戊三角形之面積。大於甲圜所函各種衆界形之面積。

又小於函圜各種象界形之面積。必與甲圜之面積恰相等可知矣。是以得一與圜界相等之直線。始得圜界之度也。但圜線式。與於直線式。此二線度雖於恰符。雖然為難。苟將圜線為萬萬段。亦可以與直線近。以置之。因可以與一直線近置之。故其與式二形面積。相等幾希之度可得矣。

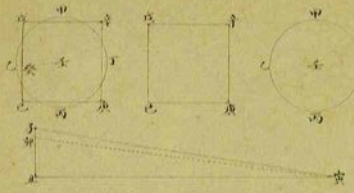
第二十三



象界形。或函圜。或函於圜。其界數愈多。愈與圜界度相近。設如甲圜函一乙丙丁三邊形。又函一乙己丙庚丁戊六邊形。自此三邊線

觀之。則彼六邊線與圜界數相近矣。誠如是。假若有十二邊。比此六邊。則十二邊又近圜界數。若有二十四邊。又更近於十二邊。倣此其邊愈增多。愈近於圜界度矣。何則。此卷第十九節既云。凡函形界必大於函於形界。而此甲圜既函象界形。自大於所函之各形矣。再乙己丙庚丁戊六邊形。既函乙丙丁三邊形。亦大於所函之形矣。由此類推之。六邊函於十二邊。十二邊函於二十四邊。其函形界自大於函於形界。故其邊愈多。愈大。愈近於圜界數矣。假若又有一函圜四邊

形。此四邊內又有一函圜八邊形。則四邊形既函八邊形。亦同前論而四邊形大於八邊形可知矣。倣此將八邊函十六邊。十六邊函三十二邊。其受函形愈小。其數愈多。是以與函於圜度愈近矣。苟欲驗之。則設一函於圜九十六邊形。又設一函圜九十六邊形。而作一圜。若將函圜形作一千五百六十二分。又將他形照此所分之度分之。則函於圜形。僅得一千五百六十一分矣。是以圜界度大於所函之衆界。小於函圜之衆界。故得一千五百六十一分。餘。其圜界中心徑線必得四百九十七分。若即小數算之。將圜界作二十二分。此圜中心徑線必得七分餘。故在圜界可得直線之度在直線度亦可得圜界度也。其直界愈多。其度愈近於圜界數可知矣。



第二十四

有一圜形。又一衆界形。此圜界度。若與彼衆界度等。則圜形之面積。必大於衆界形之面積也。設如有一甲乙丙丁圜形。一戊己庚辛四邊形。此二形界度雖等。其函於圜之面積。必大於函於衆界面積。何則。此卷第二十二節所云。有一圜形。一三角形。此三角形直角

所生之二直線內。一直線度若與彼圜幅線度等。又一直線度若與彼圜過界之度等。謂此三角形之面積與彼圜形之面積等也。故倣此而與甲乙丙丁圜之面積相等。作出一子丑寅三角形。其丑寅一邊線度與甲乙丙丁圜界度等。亦與戊己庚辛四邊度等。但子丑一邊線度雖等與圜幅壬乙線。而與彼四邊形。自壬心至癸邊壬癸垂線為長。若將三角形之子丑一邊線。與四邊形之壬癸垂線均之。從卯處截開。又自卯至寅作一直線。即成一卯丑寅三角形。同此卷第二十一節所云。與戊己庚辛四邊形等也。此卯丑寅三角形者。既自子丑寅形分之。而卯丑寅形。必小於與子丑寅形之面積相等之甲乙丙丁圜形之面積。再此戊己庚辛四邊形之面積既與彼卯丑寅三角形之面積等。則戊己庚辛四邊形之面積。亦小於甲乙丙丁圜形之面積矣。依此論而詳察之。凡界度相等之形內。其圜界函處之積。必大於方界所函之積可知矣。